ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 13

Распределение χ^2

– частный случай Γ-распределения

Общая форма Γ-распределения:

$$w^{(\Gamma)}(y,\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-\frac{y}{\beta}},\quad 0\le y<\infty$$

ПФМ Γ-распределения для начальных моментов:

$$M_y^I(u,\alpha,\beta)=(1-\beta u)^{-\alpha}$$

Моменты: $\boxed{\langle y\rangle=\alpha\beta}$ $\boxed{\sigma_y^2=\alpha\beta^2}$

Сумма независимых случайных величин y_n, распределенных согласно Γ-распределению с одинаковыми параметрами α и β:

$$Y = \sum_{n=1}^{N} y_n$$

ПФМ распределения для начальных моментов Y:

$$M_Y^I(u, \alpha, \beta) = (1 - \beta u)^{-\alpha N}$$

Это тоже ПФМ Γ-распределения с тем же параметром β и с новым параметром α : $\alpha_1 = \alpha N$

Отсюда $$w(Y) = w^{(\Gamma)}(Y, \alpha_1, \beta), \quad 0 \le Y < \infty$$

$$w_x\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \qquad \boxed{y=x^2} \qquad w_y\left(y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{2\sigma_x^2}}$$

$$\beta=2\sigma_x^2,\ \alpha=\frac{1}{2} \qquad w_y\left(y\right)=w^{(\Gamma)}\left(y,\frac{1}{2},2\sigma_x^2\right)$$

ПФМ распределения $w_y\left(y\right)$ для начальных моментов:

$$M_y^I\left(u,\alpha,\beta\right)=M_y^I\left(u,\frac{1}{2},2\sigma_x^2\right)=\left(1-2\sigma_x^2u\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1-2\sigma_x^2u}}$$

Моменты: $\boxed{\left\langle y\right\rangle=\sigma_x^2}$ $\boxed{\sigma_y^2=2\left(\sigma_x^2\right)^2}$

Сумма статистически независимых величин, распределенных по нормальному закону с нулевым мат. ожиданием и одинаковой дисперсией σ_x^2 :

$$\tilde{\chi}_N^2 = \sum_{n=1}^{N} y_n = \sum_{n=1}^{N} x_n{}^2$$

$$M_{\chi_N^2}^{(I)}(u) = \left(1 - 2\sigma_x^2 u\right)^{-\frac{N}{2}}$$

Моменты: $$\left\langle \tilde{\chi}_N^2 \right\rangle = \alpha_1 \beta = \frac{N}{2} 2\sigma_x^2 = N\sigma_x^2$$

$$\sigma_{\tilde{\chi}}^2 = \alpha_1 \beta^2 = \frac{N}{2}\left(2\sigma_x^2\right)^2 = 2N\left(\sigma_x^2\right)^2$$

Плотность распределения величины $\tilde{\chi}_N^2$:

$$w\left(\tilde{\chi}_N^2\right) = w^{(\Gamma)}\left(\tilde{\chi}_N^2, \frac{N}{2}, 2\sigma_x^2\right) = \frac{1}{\left(2\sigma_x^2\right)^{N/2}\Gamma\left(N/2\right)}\left(\tilde{\chi}_N^2\right)^{N/2-1} e^{-\tilde{\chi}_N^2/\left(2\sigma_x^2\right)}$$

N – число степеней свободы

Приведение к единичной дисперсии исходной случайной величины:

$$\xi_n^{\ 2} = \frac{x_n^{\ 2}}{\sigma_x^2}, \qquad \eta_n = \frac{y_n}{\sigma_x^2}$$

$$\sigma_\xi^2 = 1$$

$$\chi_N^2 = \sum_{n=1}^{N} \eta_n = \sum_{n=1}^{N} \xi_n^{\ 2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^{\ 2}}{\sigma_x^2} = \frac{\tilde{\chi}_N^2}{\sigma_x^2}$$

$$\tilde{\chi}_N^2 = \sigma_x^2 \chi_N^2$$

$$w\left(\tilde{\chi}_N^2\right) = \frac{1}{\left(2\sigma_x^2\right)^{N/2} \Gamma\left(N/2\right)} \left(\sigma_x^2 \chi_N^2\right)^{N/2-1} e^{-\sigma_x^2 \chi_N^2 / \left(2\sigma_x^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2^{N/2}\left(\sigma_x^2\right)^{N/2} \Gamma\left(N/2\right)} \left(\sigma_x^2\right)^{N/2-1} \left(\chi_N^2\right)^{N/2-1} e^{-\chi_N^2/2} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2} \frac{1}{2^{N/2}\Gamma\left(N/2\right)} \left(\chi_N^2\right)^{N/2-1} e^{-\chi_N^2/2} = \frac{1}{\sigma_x^2} w^{(\Gamma)}\left(\chi_N^2, \frac{N}{2}, 2\right)$$

$$\tilde{\chi}_N^2 = \sigma_x^2 \chi_N^2$$

$$w\left(\tilde{\chi}_N^2\right) = \frac{1}{\sigma_x^2} w^{(\Gamma)}\left(\chi_N^2, \frac{N}{2}, 2\right)$$

$$w\left(\chi_N^2\right) = w^{(\Gamma)}\left(\chi_N^2, \frac{N}{2}, 2\right) = \frac{1}{2^{N/2}\Gamma\left(N/2\right)}\left(\chi_N^2\right)^{N/2-1} e^{-\chi_N^2/2}$$

$$w\left(\tilde{\chi}_N^2\right) = \frac{1}{\sigma_x^2} w\left(\chi_N^2\right)$$

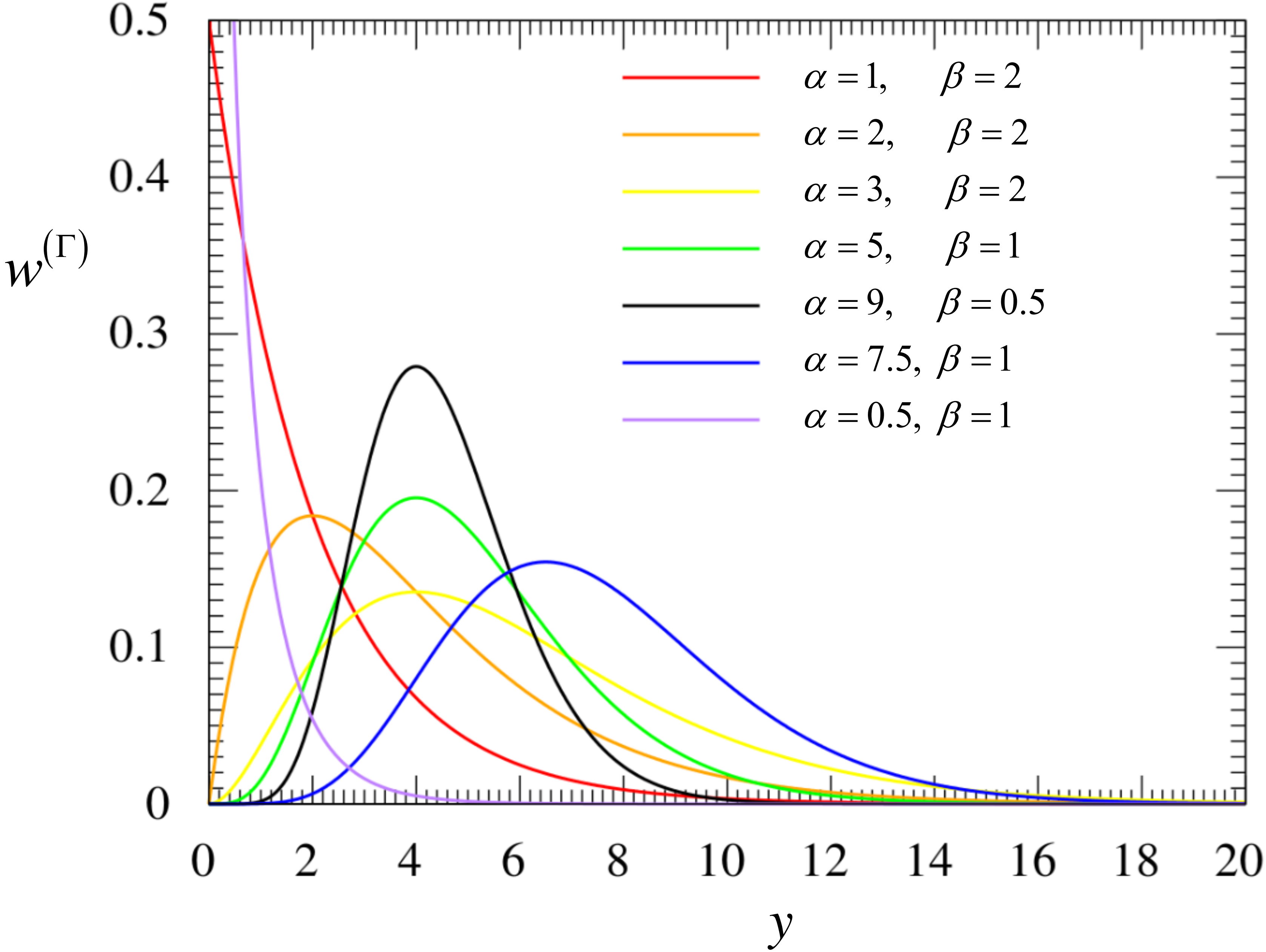
Различный стиль обозначений

Нормальное распределение:

$$w_x\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}e^{-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma_x^2}} \qquad x\sim\mathbf{N}\left(\mu,\sigma_x^2\right)$$

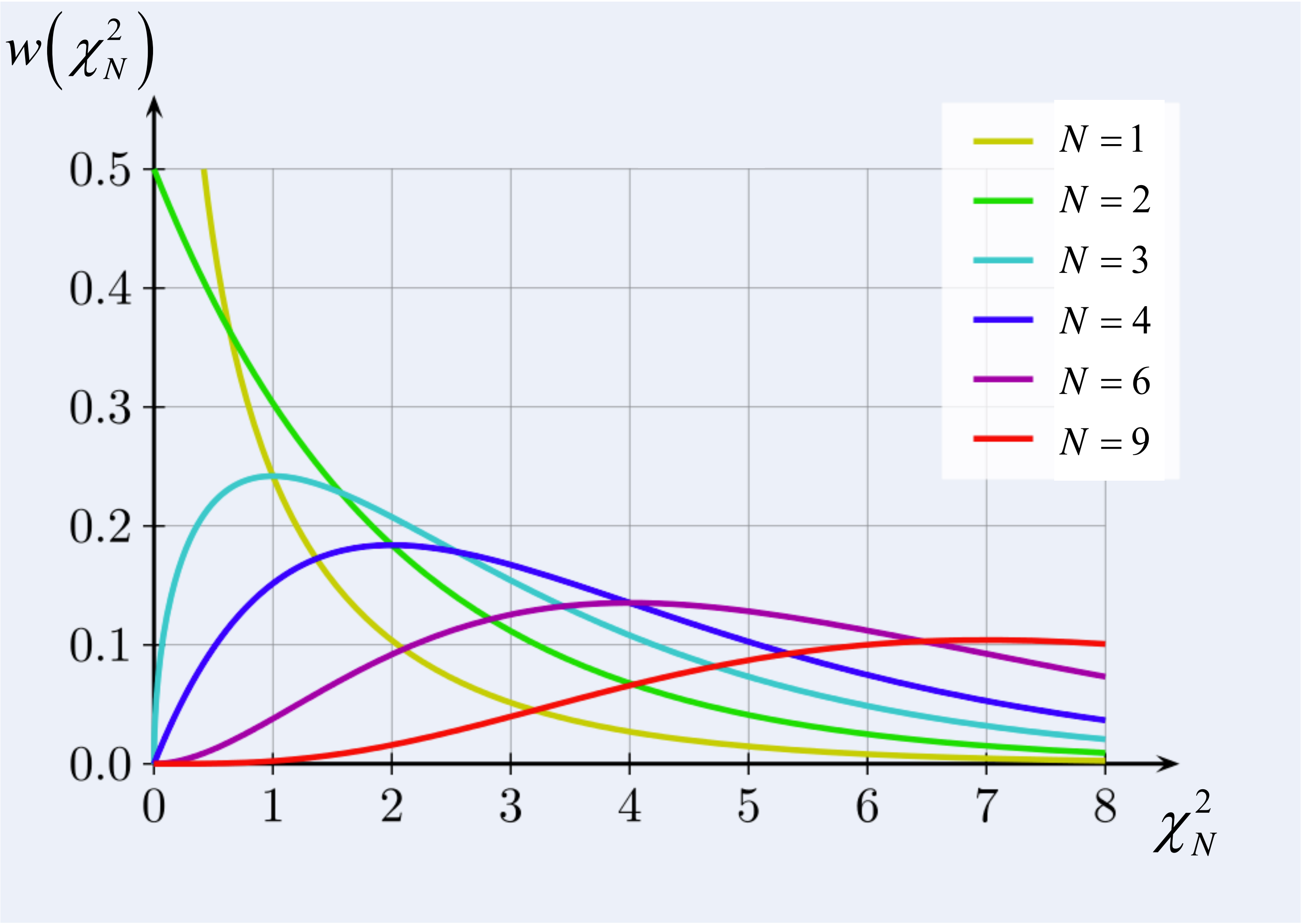
Распределение χ^2:

$$w\left(\chi_N^2\right)=w^{(\Gamma)}\left(\chi_N^2,\frac{N}{2},2\right) \qquad x\sim\chi^2\left(N\right)$$

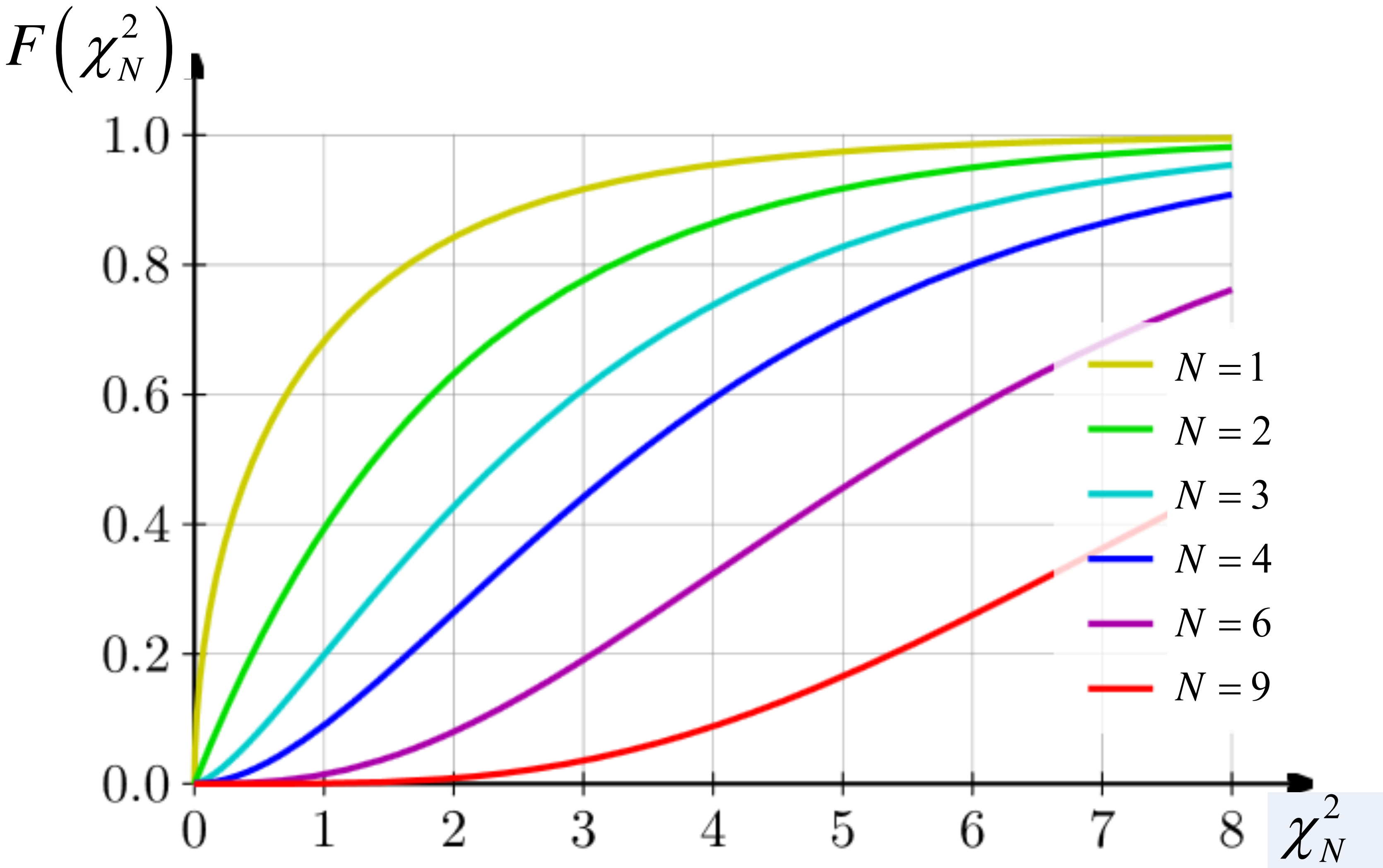


$\alpha = 1, \quad \beta = 2$
$\alpha = 2, \quad \beta = 2$
$\alpha = 3, \quad \beta = 2$
$\alpha = 5, \quad \beta = 1$
$\alpha = 9, \quad \beta = 0.5$
$\alpha = 7.5, \quad \beta = 1$
$\alpha = 0.5, \quad \beta = 1$
$w^{(\Gamma)}$
y
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

Плотность распределения



Функция распределения



Нахождение оптимальной оценки мат. ожидания с помощью распределения χ^2

$$\tilde{\chi}_N^2 = \sum_{n=1}^{N} y_n = \sum_{n=1}^{N} \left(x_n - x_0 \right)^2$$

x_0 неизвестно, и его надо оценить

$$\frac{\partial w\left(\tilde{\chi}_N^2 \right)}{\partial x_0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left[\left(\tilde{\chi}_N^2 \right)^{N/2-1} e^{-\tilde{\chi}_N^2 / \left(2\sigma_x^2 \right)} \right] = 0$$

$$\left[\left(\frac{N}{2}-1\right)\left(\tilde{\chi}_N^2\right)^{N/2-2} e^{-\tilde{\chi}_N^2/\left(2\sigma_x^2\right)}+\left(\tilde{\chi}_N^2\right)^{N/2-1} e^{-\tilde{\chi}_N^2/\left(2\sigma_x^2\right)}\left(-\frac{1}{\left(2\sigma_x^2\right)}\right)\right]\frac{\partial\tilde{\chi}_N^2}{\partial x_0}=0$$

$$\frac{\partial\tilde{\chi}_N^2}{\partial x_0}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n-x_0\right)^2=0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_0}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n{}^2-2x_n x_0+x_0{}^2\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left[\sum_{n=1}^{N}x_n{}^2-2x_0\sum_{n=1}^{N}x_n+Nx_0{}^2\right]=0,$$

$$-2\sum_{n=1}^{N}x_n+2Nx_0=0,$$

$$x_0=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n$$